## 1. Intégrales dépendant d'un paramètre

**Exercice 1** (Intégrabilité en fonction d'un paramètre)**.** Étudier, en fonction du paramètre réel $a$, l'intégrabilité sur l'intervalle $I$ de la fonction $f_a$ :

1. $f_a : t \mapsto \frac{t^a}{\exp(t)-1}, I = \mathbb{R}_+$
2. $f_a : t \mapsto \frac{1-\exp(-at^2)}{t^2}, I = \mathbb{R}_+$
3. $f_a : t \mapsto \exp(-t)t^{a-1}, I = \mathbb{R}_+$
4. $f_a : t \mapsto \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1), I = [0, \pi]$

**Exercice 2** (Théorème de la valeur initiale)**.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ telle que $f'$ soit bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+^\times$. On pose $F : p \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^\times} \exp(-pt)f(t)\mathrm{d}t$. À l'aide d'une intégration par partie, démontrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to 0^+} f$.

**Exercice 3** (Théorème de la valeur finale)**.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ telle que $f'$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^\times$. On pose $F : p \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^\times} \exp(-pt)f(t)\mathrm{d}t$. On souhaite démontrer que $\lim\limits_{p\to 0^+} pF(p) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

1. Montrer que la fonction $G : p \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^\times} \exp(-pt)f'(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire $\lim\limits_{p\to 0^+} G(p) = \lim\limits_{+\infty} f - \lim\limits_{0^+} f$.
3. Montrer que pour tout $p \geq 0$, on a $G(p) = -\lim\limits_{0^+} f + pF(p)$, puis conclure.

**Exercice 4** (Calcul de l'intégrale de Gauss)**.** Soit pour $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-(t^2+1)x^2)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $h(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$. Exprimer $F'$ en fonction de $h$ et de sa dérivée.
3. En déduire une expression de $F$ en fonction de $F(0)$ et de $h$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) \leq \exp(-x^2)\frac{\pi}{4}$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} \exp(-t^2)\mathrm{d}t$.

**Exercice 5.**

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^2 \frac{\exp(-xt)}{t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
2. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{t}\mathrm{d}t$.

**Exercice 6** (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$, on définit $f_\alpha(t) = \exp\left(-\alpha\frac{t^2}{2}\right)$. On pose alors $T_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixt)f_\alpha(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $T_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $T_\alpha$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{a}y = 0$, puis sachant que $\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, en déduire une expression de $T(f_\alpha)$.

**Exercice 7** (Domination locale)**.** On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\mathrm{d}t$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^\times$. Montrer que la fonction $F$ est continue sur le segment $[0, A]$.
2. En déduire que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8** (☢Calcul de l'intégrale de Dirichlet)**.** On pose pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\exp(-xt)\mathrm{d}t$, et également pour $t \geq 1$, $g(x,t) = \frac{\exp(-xt)}{1+x^2}(x\sin(t) + \cos(t))$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\exp(-xt)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = g(x,1) - \int_1^{+\infty} \frac{g(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
3. En déduire que la fonction $F$ est continue en $0^+$, puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

## 2. Transformation d'intégrale en série

**Exercice 9** (Transformations d'intégrale en série)**.** Montrer les égalités suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$
3. $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\exp(t)-1}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p!}{n^{p+1}}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\exp(t)-1}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$

**Exercice 10** (Un calcul de la somme des inverses des carrés)**.** On admet la valeur des intégrales de Wallis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction arcsin.
2. En déduire que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\sin^{2n+1}(t)$.
3. En déduire que $\frac{\pi^2}{8} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, puis calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

**Exercice 11** (Fonctions entières bornées)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et $f$ la fonction somme.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(r\exp(i\theta)\right)\exp(-in\theta)\,\mathrm{d}\theta$ (on admettra le théorème d'interversion pour les fonctions à valeur complexes).
2. On suppose que $f$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que $f$ est constante.

## 3. Extrait du concours (3/2)

Soit $G$ la fonction qui, à tout réel $x \geq 0$, associe : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.
2. Que vaut $G(0)$?
3. Soit $A$ un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif $t$, et tout réel $x$ de $[0, A]$ :
$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leq \left(1 + t^A\right) \mathrm{e}^{-t}.$$
4. Montrer que $G$ est continue sur $[0, A]$.
5. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$ : $G(x+1) = (x+1)\, G(x)$.
6. Calculer, pour tout entier naturel $n$ : $G(n)$.

## 4. Extrait du concours (5/2)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} \exp(-t)\mathrm{d}t$$

1. Établir l'égalité :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \arctan(2t)\mathrm{d}t = x \arctan(2x) - \frac{1}{4} \ln\left(1 + 4x^2\right)$$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$.
3. Pour $a > 0$, montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-a, a[$.
4. En déduire que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x)$.
6. En déduire une expression de $f$ à l'aide des fonctions usuelles.