1. Détermination de rayon de convergence

Exercice 1 (✓Rayon de convergence de la série dérivée)**.** Soit (a_n) une suite. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 2 (Calcul de rayon de convergence)**.** Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes, éventuellement en fonction du paramètre réel a :

1. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n-1} z^n$
2. $\displaystyle\sum \exp\left(-\sqrt{n}\right) z^n$
3. $\displaystyle\sum \frac{3^n+n}{n^2+1} z^n$
4. $\displaystyle\sum \ln(n!) z^n$
5. $\displaystyle\sum \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n$
6. $\displaystyle\sum n^a z^n$
7. $\displaystyle\sum a^{n!} z^n$
8. $\displaystyle\sum \arctan(n^a) z^n$
9. $\displaystyle\sum \exp\left(\ln(n)^a\right) z^n$

2. Calculs de sommes de séries numériques et fonction somme de séries entières

Exercice 3 (Calculs de sommes de séries entières)**.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une expression de la fonction somme de la série entière en fonction des fonctions usuelles. On donnera le rayon de convergence de la série entière associée.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+n^2-1}{n+1} x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n} x^n$
7. (☢) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n}{(2n+1)!} x^n$
8. (☢) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n+1)!} x^{4n+1}$
9. (☢) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$

Exercice 4 (Calculs de somme de séries numériques)**.** Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n+n3^n}{(n-1)n5^n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} 3^{\frac{2^k}{k!}}$.
5. (☢) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-2k}{2k+2}$.
6. (☢) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

3. Développement en série entière

Exercice 5 (Utilisation des opérations algébriques)**.** Dans chacun des cas suivants, donner une série entière $\sum a_n x^n$ dont la fonction proposée est la fonction somme. On donnera également le rayon de convergence de la série entière.

1. $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$
2. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
3. $x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$
4. $x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
5. $x \mapsto \frac{\sin(4x)}{\sin(x)}$
6. $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
7. $x \mapsto \left(\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}\right)^2$
8. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$
9. $x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$

Exercice 6 (Utilisation d'une équation différentielle)**.** Dans chacun des cas suivants, donner une série entière $\sum a_n x^n$ dont la fonction proposée est la fonction somme. On donnera également le rayon de convergence de la série entière.

1. $f : x \mapsto \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $f : x \mapsto \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$

4. Résolution de problèmes utilisant les séries entières

Exercice 7 (✓Résolution d'équations différentielles)**.** Pour chacunes des équations différentielles suivantes, déterminer les solutions développables en série entière. On donnera en particulier une minoration du rayon de convergence et une expression de la somme de la série utilisant les fonctions usuelles.

1. $(1-x^2)y' - xy = 1$
2. $(1+x^2)y'' - 2y = 0$
3. $4xy'' + 2y' - y = 0$
4. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Exercice 8 (Serie génératrice exponentielle des nombres de Bell)**.** On définit la suite (B_n) par $B_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

1. Montrer que la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence strictement positif (on pourra montrer par récurrence que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ est majorée par 1). On note f la fonction somme de cette série entière.
2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction f.
3. En déduire une expression de la fonction f.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$.

Exercice 9 (Série génératrice de la suite de Fibonacci)**.** On considère la suite de Fibonacci $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \end{cases}$. Dans tout l'énoncé, on note $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $\overline{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$.

1. Montrer que la série entière $\sum u_n x^n$ admet un rayon de convergence strictement positif (on pourra montrer en utilisant un théorème de première année que $u_n = O(\Phi^n)$). On note f la fonction somme de cette série entière.
2. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\Phi}\right[, \quad f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
3. En utilisant une décomposition en éléments simples, retrouver l'expression suivante de la suite de Fibonacci : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right)$ (on pourra démontrer puis utiliser la factorisation $1 - x - x^2 = (1-\Phi x)(1-\overline{\Phi}x)$).

Exercice 10 (Exponentielle complexe)**.** Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|\exp(z) - 1\right| \leq \exp(|z|) - 1 \leq |z| \exp(|z|)$$

Exercice 11 (Un prolongement $\mathscr{C}^\infty$)**.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\exp(x)-1} - \frac{1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra d'abord montrer que c'est le cas pour la fonction $x \mapsto \frac{\exp(x)-1-x}{x^2}$).

Exercice 12 (Existence d'une fonction dont les dérivées sont prescrites)**.** Existe-t'il une fonction f infiniment dérivable en 0 telle que $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = n^2 n!$?

Exercice 13 (☢Nombre de façons de rendre la monnaie)**.** Dans ce problème on cherche une expression explicite du nombre de façons de rendre la monnaie d'une valeurs de n avec des pièces d'une valeur de 2 et 3. On pose

$$d_n = \text{card}\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, \quad 2n_1 + 3n_2 = n\}.$$

1. En utilisant le produit de Cauchy et les entiers d_n, exprimer le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$.
2. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que
$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{(1-x)^2} + \frac{\delta x + \varepsilon}{1+x+x^2}$$
3. Donner le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-x)^2}$.
4. Donner le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{1}{1+x+x^2}$. On pourra utiliser le fait que $(1+x+x^2)(1-x) = 1-x^3$.
5. En déduire une expression exacte et explicite de d_n en fonction de n.

Exercice 14 (☢Développement en série entière d'une fonction inverse)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif telle que $a_0 = 1$. Soit S la fonction somme de cette série entière. On définit la suite (b_n) par

$$\begin{cases} b_0 &= 1 \\ \forall n \geq 0, \quad b_n &= -\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j} \end{cases}$$

Enfin, soit $\rho \in]0, R[$.

1. Soit C un nombre réel positif. Montrer que $\forall n \geq 1, \quad C \leq (1+C)^n$
2. Montrer que la suite $\left(a_n \rho^n\right)$ est bornée, puis en déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \geq 0, \quad |a_n| \leq \left(\frac{K}{\rho}\right)^n$
3. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad |b_n| \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$.
4. En déduire que la série entière $\sum b_n z^n$ admet un rayon de convergence strictement positif.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{S(x)}$ est une fonction développable en série entière.
6. Montrer que la fonction tan est développable en série entière.

Exercice 15 (Nombre dérivée en 1 d'une fonction somme à termes positifs)**.** Soit (a_n) une suite à termes positifs. On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence égal à 1, que $\sum a_n$ est convergente. On note f sa fonction somme.

1. Montrer que $\forall t \in [-1, 1], \quad \frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right) t^n$
2. (☢) En déduire que f est dérivable à gauche en 1 si, et seulement si la série $\sum_n \left(\sum_{k \geq n+1} a_k\right)$ est convergente, et qu'alors $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

5. Extrait d'un problème de concours (3/2)

On considère la fonction suivante

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)\mathrm{d}t \end{array}$$

ainsi que l'équation différentielle $\mathscr{E}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y' + 2xy - 1 = 0$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est solution de l'équation $\mathscr{E}$.
3. Montrer que la fonction F est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

On pose donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), et préciser les valeurs de a_0 et a_1.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire l'expression du développement en série entière de F.
7. Quelle est la nature de la série de terme général
$$\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} \quad ?$$
8. Montrer que la fonction
$$x \mapsto \int_0^x \exp(t^2)\mathrm{d}t.$$
est développable en série entière avec rayon de convergence infini, et donner la série entière correspondante.
9. Déduire de tout ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

6. Extrait d'un problème de concours (5/2)

Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos t}$.

1. Que vaut $F(0)$?
2. Soit $a \in]0,1[$. Étudier la dérivabilité de F sur $[-a,a]$, et exprimer, pour tout réel x de $[-a,a]$, $F'(x)$ en fonction de x.
3. Étudier la dérivabilité de F sur $]-1,1[$.
4. A l'aide du changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$:
$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}.$$
5. En déduire, pour tout réel x de $]-1,1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$.

   Pour ce qui suit, on utilisera le fait que, pour tout réel x de $]-1,1[$:
$$(1-x^2)F'(x) = xF(x) + 1.$$
6. Donner la solution générale sur $]-1,1[$, de l'équation homogène :
$$(\mathscr{E}_0) \qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0.$$
7. A l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
$$(\mathscr{E}) \qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1.$$
8. Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy
$$(\mathscr{P}_0) \qquad \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$
et
$$(\mathscr{P}_1) \qquad \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$
9. Pour tout réel x de $]-1,1[$, déduire de la résolution de $(\mathscr{P}_1)$ une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction arcsinus.