Fonctions intégrables, applications

On note $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou complexes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

1. Propriétés

Proposition 1: Espace vectoriel des fonctions intégrables

L'espace $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'intégrale est une application linéaire sur cet espace.

Preuve :
On montre que l'ensemble des fonction intégrable sur I est un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur I. Soient f, g deux fonctions continues et intégrables sur I et λ un scalaire. Alors on a

$$\left|f+\lambda g\right| \leq \left|f\right| + \left|\lambda\right|\left|g\right|$$

donc par critère de comparaison la fonction $\left|f+\lambda g\right|$ et donc la fonction $f+\lambda g$ est intégrable sur I. ■

Proposition 2: Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$. Alors

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

Preuve :
Si f est à valeur réelles, on considère f^+ et f^- les fonctions continues et positives telles que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et } |f| = f^+ + f^-$$

Alors on sait que $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$ et $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$. On a alors par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_I f\right| \leq \left|\int_I f^+ - \int_I f^-\right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- \leq \int_I |f|$$

Le cas f à valeur complexes n'est pas exigible. ■

Lemme 3: Caractérisation du vecteur nul

Soit $f \in \mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$ vérifiant $\int_I |f| = 0$. Alors f est nulle sur I.

Preuve :
On procède par contraposée. Si $|f|$ est non nulle sur I, alors il existe un **segment** $J \subset I$ sur lequel la fonction $|f|$ est strictement positive et alors par intégration sur un sous-intervalle et positivité de l'intégrale on a

$$\int_I |f| \geq \int_J |f| > 0.$$

■

2. Régularité d'une intégrale à paramètre

On considère une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduit à un point. On s'intéresse alors à l'existence et aux propriétés de régularité de la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{dt} \end{array}$$

Exemple 4.

Un exemple classique venant des SII est la *Transformée de Laplace*, dont la définition est

$$\mathscr{L}(f) : p \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^\times} f(t)\exp(-pt)\mathrm{dt}$$

où p est un nombre complexe.

Théorème 5: Continuité d'une intégrale à paramètre

On suppose que

- $\forall x \in I, t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J
- $\forall t \in J, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I
- il existe une fonction $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}^+$ **intégrable** telle que

$$\forall x, t \in I \times J, \quad \left| f(x,t) \right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{dt}$ est bien définie et est continue sur I.

Preuve :
H.P. ■

Remarque 6.

L'hypothèse de domination assure que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et donc en particulier que la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{dt}$ est bien définie ! Dans cette hypothèse il faut bien prendre garde que la fonction dominante ne dépende que de la variable d'intégration et est indépendante de l'autre variable.

Exemple 7.

Étudions la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\mathrm{dt}$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \in [1,+\infty[$, on a

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t) \right| \leq \frac{|\sin(xt)|}{t}\exp(-t) \leq \frac{\exp(-t)}{t} \leq \exp(-t) \quad \text{car } t \geq 1$$

avec $t \mapsto \exp(-t)$ intégrable sur $[1,+\infty[$ car c'est une intégrale de référence. donc la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\mathrm{dt}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8.

On a volontairement omis l'hypothèses de régularité par rapport à t dans la rédaction, car en pratique celles-ci ne seront pas exigées.

Théorème 9: Dérivabilité d'une intégrale à paramètres

On suppose que

- $\forall x \in I, \quad t \mapsto f(x,t)$ est **intégrable** sur J
- $\forall t \in J, \quad x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I
- $\forall x \in I, \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J
- il existe une fonction $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}^+$ **intégrable** telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie, est de classe $\mathscr{C}^1$ est continue sur I et on a

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Preuve :
H.P.

Remarques 10.

1. La première hypothèse assure que l'intégrale $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x \in I$
2. Les hypothèses suivantes ne sont pas autre chose que
   - s'assurer que l'intégrale $\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie,
   - vérifier les hypothèses de continuité d'une intégrale à paramètre, mais pour l'intégrale à paramètre $x \mapsto \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Exemple 11.

La fonction $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue et

$$\frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t) = O_{t\to 0}(1) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t) = O_{t\to+\infty}(\exp(-t))$$

De plus

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$ la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}\exp(-t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \cos(xt)\exp(-t)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\cos(xt)\exp(-t)\right| \leq \exp(-t)$ avec $t \mapsto \exp(-t)$ qui est une fonction intégrable de référence.

Ainsi la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\exp(-t)\mathrm{d}t$$

Remarque 12.

En passant par les nombres complexes, on trouve alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left((-1+ix)t\right) \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \arctan(x) + F(0) = \arctan(x)$

3. Intégrale d'une somme de série intégrable

Théorème 13: Intégrale d'une somme de série intégrable

Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $f_n : I \to \mathbb{R}$ intégrables telles que

$$\forall t \in I, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

Si la série $\sum \int_I \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t$ est convergente, alors

- S est intégrable sur I,
- $\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$.

Preuve :
H.P.

Remarque 14.

Ce théorème généralise le théorème d'intégration pour les séries entières, et s'utilise souvent en développant en série entière une partie de la fonction S à intégrer.

Exemple 15.

On a

$$\forall t \in \underbrace{]0,1[}_{I}, \quad \underbrace{\frac{\ln(t)}{t-1}}_{S(t)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\ln(t)\, t^n}_{f_n(t)}$$

Or, une intégration par parties en dérivant le logarithme donne immédiatement

$$\int_I \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

ce qui prouve que toutes les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1[$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur I, et

$$\int_I \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$