Courbes et surfaces dans l'espace

Notations.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de son repère canonique $\left(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, un triplet (x, y, z) pourra désigner en fonction du contexte et de l'interprétation voulue :

- le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère canonique, soit $\mathbf{M}(x, y, z) = \mathbf{O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère canonique, soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{j}$.

1. Surfaces dans l'espace

1.1. Surfaces paramétrées

Une surface S de l'espace est *paramétrée* si ses points $\mathbf{M}$ ont des coordonnées de la forme

$$\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

avec x, y, z des fonctions de deux variables à valeurs réelles. Autrement dit on modélise une telle surface par une fonction $\mathbf{M} : (u, v) \mapsto \mathbf{M}(u, v)$ de deux variables à valeurs vectorielles. On note parfois simplement que la surface S est paramétrée par

$$(u,v) \in \Omega, \quad \begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$$

Exemple 2.

Le plan d'équation $z = 0$ peut être paramétré par

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= 0 \end{cases}$$

Soit S une surface paramétrée par $\mathbf{M} : (u, v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Alors pour u_0, v_0 fixés, les fonctions $\mathbf{M}_{v=v_0} : u \mapsto \mathbf{M}(u, v_0)$ et $\mathbf{M}_{u=u_0} : v \mapsto \mathbf{M}(u_0, v)$ modélisent des trajectoires de courbes paramétrées tracées sur la surface S passant par le point $\mathbf{M}(u_0, v_0)$.

Définition 3: Courbes coordonnées, courbe tracée

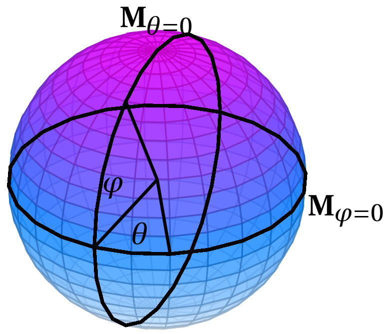
Les courbes paramétrées par $\mathbf{M}_{u=u_0}$ et $\mathbf{M}_{v=v_0}$ sont appelées *courbes coordonnées* de S. Une courbe paramétrée par une fonction vectorielle ψ est dite *tracée* sur S si son image est contenue dans l'image de $\mathbf{M}$.

Exemple 4.

Soit S la surface paramétrée

$$\begin{cases} x &= \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= \sin(\varphi) \end{cases}$$

Alors les courbes coordonnées de S sont les méridiens et les parallèles de la sphère.



Définition 5: Point régulier à une surface paramétrée

Soit S une surface paramétrée par une fonction $\mathbf{M}$. On dit que le point $\mathbf{M}(u,v)$ de paramètres (u,v) est *régulier* si les dérivées partielles de la fonction $\mathbf{M}$ au point de paramètre (u,v) ne sont pas colinéaires.

Exemple 6.

Soit S la sphère paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y &= \sin(\varphi) \end{cases}$$

- Alors le point de paramètre $(0,0)$ est régulier puisque l'on a

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  qui ne sont pas colinéaires.

- Le point de paramètre $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ n'est pas régulier puisque l'on a

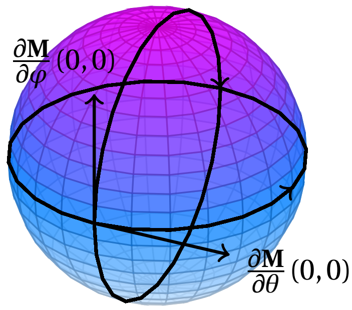
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 7.

Pour S une surface paramétrée par une fonction $\mathbf{M}$, au point de paramètre (u,v), les vecteurs dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v)$$

sont, s'ils sont non nuls, des vecteurs tangents des courbes de coordonnées au point de paramètre (u,v)



Définition 8: Plan tangent en un point régulier

Soit S une surface paramétrée par une fonction $\mathbf{M}$. Soit $\mathbf{M}(u,v)$ un point régulier de S. Alors le plan tangent à S au point de paramètre (u,v) est le plan passant par $\mathbf{M}(u,v)$ et dirigé par les vecteurs $\partial_u \mathbf{M}(u,v)$ et $\partial_v \mathbf{M}(u,v)$.

Exemple 9.

Soit la sphère paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= \sin(\varphi) \end{cases}$$

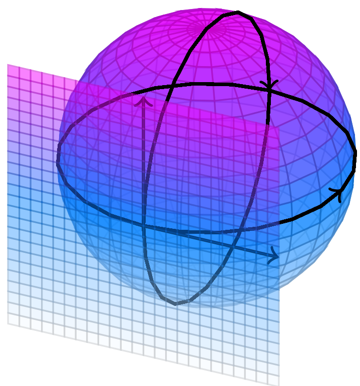
Alors le point $(1,0,0) = \mathbf{M}(0,0)$ est régulier car

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où le plan tangent paramétré par

$$(u,v) \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= 1 \\ y &= u \\ z &= v \end{cases}$$

qui est le plan d'équation $x = 1$, conformément à l'intuition



Définition 10: Droite normale, vecteur normal en un point régulier

Soit S une surface paramétrée par une fonction $\mathbf{M}$, et $\mathbf{M}(u,v)$ un point régulier. Alors la droite orthogonale au plan tangent à S en $\mathbf{M}(u,v)$ et passant par $\mathbf{M}(u,v)$ est appelée *droite normale* à S en $\mathbf{M}(u,v)$, et tout vecteur directeur de cette droite est appelé *vecteur normal* à S en $\mathbf{M}(u,v)$.

Remarque 11.
La droite normale est donc dirigée par $\partial_u \mathbf{M}(u,v) \wedge \partial_v \mathbf{M}(u,v)$, qui est un vecteur normal privilégié.

1.2. Surfaces données par une équation cartésienne

Une surface S peut aussi être donnée par une équation cartésienne de la forme

$$S : g(x,y,z) = 0$$

on s'intéresse au cas où la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$. Il s'agit d'un cas particulier de *surfaces de niveau* de la fonction g, qui sont les surfaces de la forme $S_\lambda : g(x,y,z) = \lambda$.

Exemple 12.
La sphère $\mathscr{S}$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 admet pour équation cartésienne :

$$\mathscr{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Les plans vectoriels admettent des équations de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Toutes les surfaces de niveau de $g : (x,y,z) \mapsto ax + by + cz$ sont des plans, et toutes les surfaces de niveau de $g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères centrés en $\mathbf{O}$.

Pour une telle surface, on peut démontrer que le voisinage de n'importe quel point (x_0, y_0, z_0) non critique de la fonction g peut être paramétrée par une fonction $\mathbf{M}$ tel que le point (x_0, y_0, z_0) corresponde à un point régulier de la fonction $\mathbf{M}$. On peut alors définir un plan tangent en ce point, la difficulté étant de retrouver le plan tangent sans repasser par un paramétrage.

Proposition 13: Plan tangent à une surface donnée par équation cartésienne

Soit une surface S d'équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$. Soit un point (x_0, y_0, z_0) de la surface et non critique pour g. On dit alors que le point $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ est *régulier*. Le plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) est orthogonal à $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$.

Preuve :
Soit $(u,v) \mapsto \mathbf{M}(u,v)$ un paramétrage de S au voisinage de $\mathbf{M}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. On a donc

$$\forall u, v, \quad g\left(\mathbf{M}(u,v)\right) = 0$$

On peut alors dériver cette équation par rapport à u et v et appliquer le résultat au point (u_0, v_0). La règle de la chaîne donne alors

$$\forall u, v \quad \begin{cases} \langle \nabla g\left(\mathbf{M}(u_0, v_0)\right), \partial_u \mathbf{M}(u_0, v_0) \rangle = 0 \\ \langle \nabla g\left(\mathbf{M}(u_0, v_0)\right), \partial_v \mathbf{M}(u_0, v_0) \rangle = 0 \end{cases}$$

Autrement dit le vecteur gradient $\nabla g\left(\mathbf{M}(u_0, v_0)\right)$ est orthogonal au plan tangent. ■

Remarque 14.
Si la surface est donnée par un paramétrage, alors le plan tangent est naturellement donné de façon paramétrique. Si la surface est donnée par une équation cartésienne, le plan tangent est naturellement donné par ... une équation cartésienne. Le vecteur gradient est alors un vecteur normal privilégié.

Exemple 15.
On retrouve alors que le plan tangent à la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 au point $(1,0,0)$ est le plan d'équation $x = 0$.

1.3. Cas des surfaces de la forme $z = f(x, y)$

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et soit (x, y, z) un point de $\mathscr{S}$ de côte positive. Alors on peut écrire $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, ce qui permet d'écrire une équation de la forme $z = f(x, y)$ de la partie supérieure de la sphère. Cette écriture permet aussi d'écrire un paramétrage de la sphère :

$$\forall (u, v) \in \overline{B}(\mathbf{O}, 1), \quad \begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= \sqrt{1-u^2-v^2} \end{cases}$$

Plus généralement, les surfaces pouvant s'écrire sous la forme $z = f(x, y)$ bénéficient des deux points de vue précédent :

- elles possèdent un paramétrage $\begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u, v) \end{cases}$, dont les courbes coordonnées ont une construction géométrique simple (voir figure 1),
- elles possèdent une équation $\underbrace{z - f(x, y)}_{g(x,y,z)} = 0$.

et dans ce cas les deux points de vue concernant le plan tangent sont cohérents et tous les point sont réguliers pour les deux définitions.

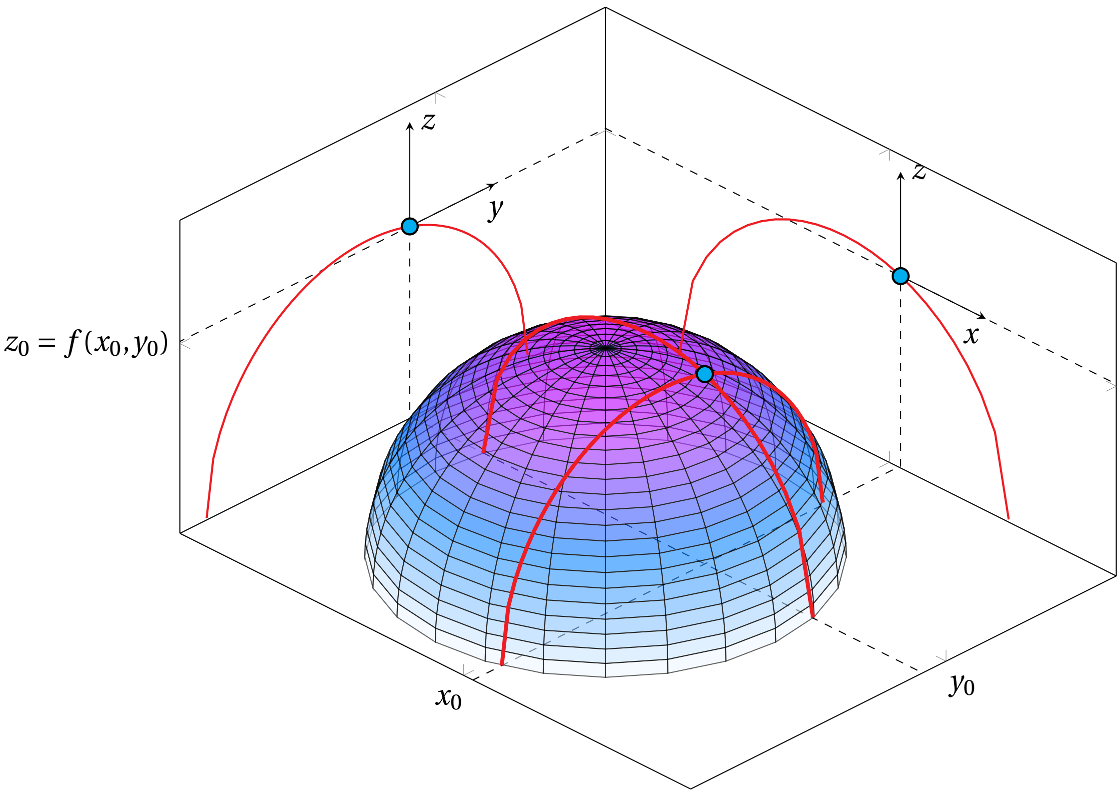


Figure 1: Courbes coordonnées sur la surface d'équation $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

On peut également dans ce cas déterminer de façon élémentaire la position de la surface par rapport à son plan tangent.

Proposition 16: Détermination de la position par rapport au plan tangent

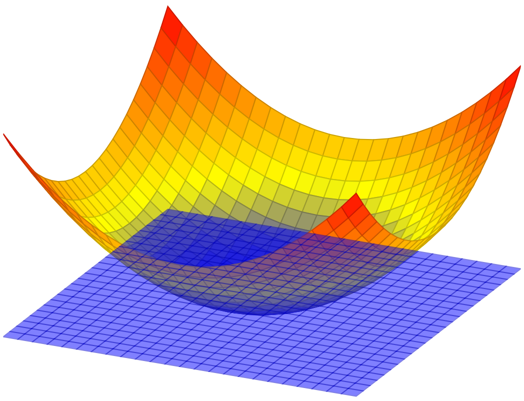
Soit S une surface paramétrée par $\begin{cases} x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u,v) \end{cases}$ avec f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que le point (u_0, v_0) est un point critique pour f. Alors

- si $\mathrm{Sp}\left(H_f(u_0, v_0)\right) \subseteq \mathbb{R}_+^\times$, alors la surface est localement au dessus de son plan tangent
- si $\mathrm{Sp}\left(H_f(v_0, u_0)\right) \subseteq \mathbb{R}_-^\times$, alors la surface est localement en dessous de son plan tangent
- sinon, on ne peut rien dire en général.

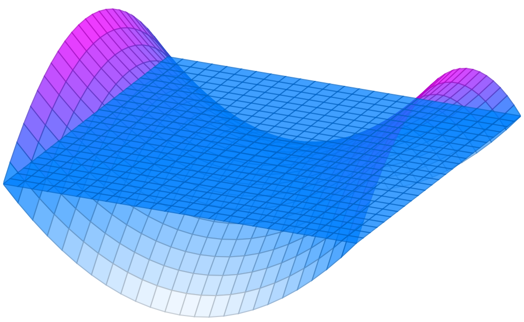
Preuve :
C'est une ré-écriture géométrique du théorème de détermination des extrema locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. ■

Exemple 17.

1. La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ est au dessus de son plan tangent en $(0,0,0)$



2. La surface d'équation $x^2 - y^2 = z$ traverse son plan tangent en $(0,0,0)$.



2. Exemples de surfaces

Certaines surfaces ont des propriétés particulières et ces propriétés peuvent simplifier leur étude et leur compréhension. Nous nous concentrerons sur deux types de surfaces : les surfaces réglées et les surfaces de révolution.

2.1. Surfaces réglées

Définition 18: Surface réglée

Soit S une surface. On dit que c'est une surface *réglée* si celle-ci est réunion de droites. Ces droites s'appellent alors *génératrices*.

Remarque 19.

Si $S = \cup_u D_u$ est une réunion de droites, et que l'on pose $D_u = A_u + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}_u\right)$, alors on obtient un paramétrage de S par $\mathbf{M}(u,v) = A_u + v\overrightarrow{a}_u$. La courbe de coordonnée associée à $u = u_0$ est alors la droite D_{u_0}. Ainsi, si le point $\mathbf{M}(u_0, v_0)$ est régulier, le vecteur $\overrightarrow{a}_{u_0}$ est un des vecteurs directeurs du plan tangent par définition, d'où D_{u_0} est contenue dans le plan tangent.

Proposition 20: Génératrices et plan tangent : condition nécessaire pour être réglée

Soit S une surface réglée et $\mathbf{M}$ un point régulier. Alors le plan tangent à S en $\mathbf{M}$ contient la génératrice passant par ce point.

Exemple 21.

La surface engendrée par la famille de droites

$$D_u : \begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\\ 0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-\sin(u)\\ \cos(u)\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

est paramétrée par

$$\begin{cases} x &= \cos(u) - v\sin(u)\\ y &= \sin(u) + v\cos(u)\\ z &= v\end{cases}$$

Réciproquement, on constate qu'une surface paramétrée par

$$\begin{cases} x &= v\cos(u)\\ y &= v\sin(u)\\ z &= u\end{cases}$$

est une surface réglée, les génératrices étant données par

$$D_u : \begin{pmatrix}0\\ 0\\ u\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

2.2. Surfaces de révolution

Une surface sera dite de révolution si elle est obtenue par rotation d'une courbe autour d'un axe Δ. C'est en particulier le cas si les intersections de la surface avec des plans parallèles sont des cercles centrés sur une droite orthogonale aux plans. Ces cercles sont appelés des *parallèles*.

Si une surface est de révolution d'axe Δ, alors on peut également l'obtenir en faisant tourner autour de Δ la courbe obtenue par l'intersection de la surface avec un plan contenant Δ. Ces courbes sont appelées *méridiennes*.

Remarque 22.

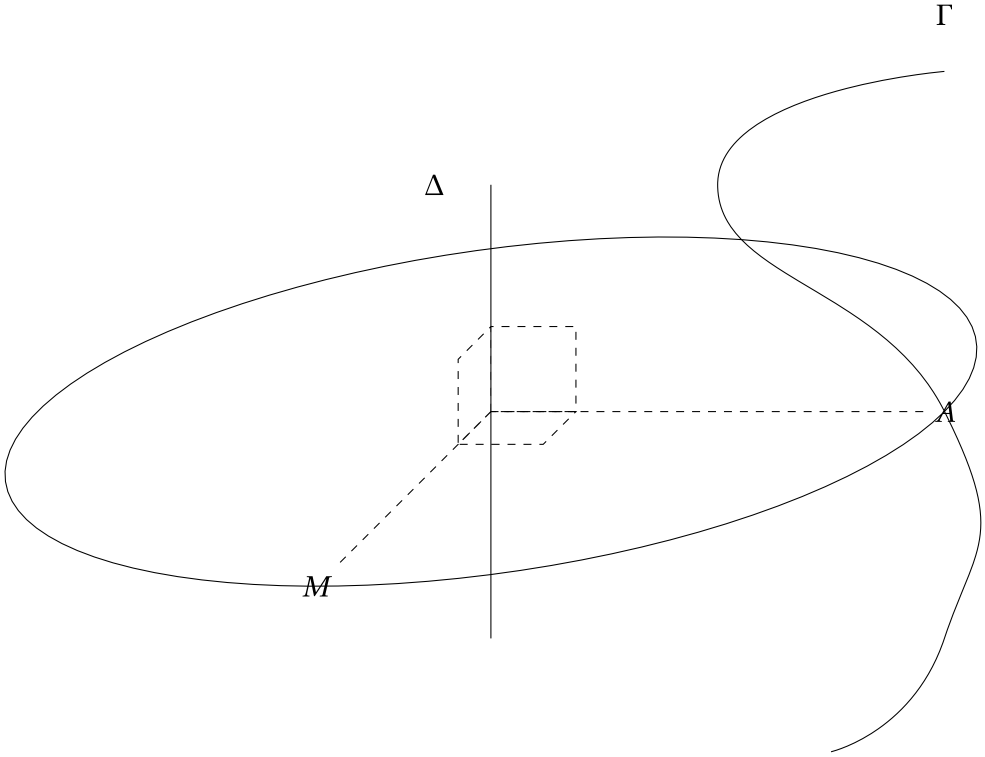
On peut en fait obtenir la surface en faisant tourner une demi-méridienne.

On peut alors obtenir un paramétrage d'une telle surface en utilisant les matrices de rotations pour calculer les images des points de la courbe à faire tourner.

On peut en général également obtenir une équation cartésienne en utilisant le raisonnement suivant. Soit S une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'un axe Δ. Alors un point **M** appartient à cette surface si, et seulement si il est situé sur un cercle centré sur Δ contenu dans un plan orthogonal à Δ et interceptant Γ. C'est à dire que l'on peut trouver **A** un point de Γ tel que

- le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AM}}$ est orthogonal à l'axe de rotation Δ,
- les points **A** et **M** sont sur une sphère centrée sur l'axe de rotation Δ.

On peut prendre n'importe quelle sphère centrée sur Δ et ce choix détermine la difficulté d'élimination des variables dans les calculs.



Exemple 23.

Déterminons un paramétrage et une équation cartésienne de la surface S de révolution obtenue en faisant tourner la droite $D : (1,0,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ autour de l'axe (Oz). Un point $M(x, y, z)$ est alors l'image d'un point de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v \end{pmatrix}$ par une rotation d'axe (Oz), dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où le paramétrage

$$\begin{cases} x &= \cos(\theta) - v\sin(\theta) \\ y &= \sin(\theta) + v\cos(\theta) \\ z &= v \end{cases}$$

Une équation cartésienne peut s'obtenir à partir de ce paramétrage. On propose ici une autre solution. Un point $\mathbf{M}(x, y, z)$ est sur cette surface de révolution si, et seulement s'il est sur un cercle orthogonal à l'axe (Oz) et passant par D. Autrement dit, l'axe de rotation passant par $\mathbf{O}$,

$$\mathbf{M}(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \exists \mathbf{A} \in D, \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{AM}} \perp (Oz) \\ \left\|\overrightarrow{\mathbf{OA}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right\| \end{cases}$$

soit en prenant $\mathbf{A} = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ et $(0, 0, 1)$ directeur de (Oz) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, &\quad \begin{cases} z - t &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 + t^2 + t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + z^2 \end{aligned}$$

3. Courbes de l'espace

Le cas des courbes paramétrées de l'espace a déjà été vu et ces courbes peuvent s'étudier grâce aux outils de l'analyse des fonctions d'une variable à valeur réelles.

On s'intéresse aux représentation cartésiennes des courbes, comme c'est le cas par exemple des droites dont une représentation cartésienne s'obtient grâce à un système de deux équations linéaires traduisant le fait qu'une droite peut être vue comme intersection de deux plans.

3.1. Représentation cartésienne

Une courbe $\mathscr{C}$ peut être obtenue par l'intersection de deux surfaces S_1 et S_2 et cette représentation n'est pas unique. Par exemple un cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan, ou de deux sphères.

Si les surfaces sont données par une équation cartésienne $S_1 : f(x, y, z) = 0$ et $S_2 : g(x, y, z) = 0$, alors les points $\mathbf{M}$ de la courbe $\mathscr{C}$ intersection sont donnés par les solutions du système

$$\mathscr{C} : \begin{cases} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

Un point $\mathbf{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{C}$ est alors dit régulier s'il n'est critique ni pour f ni pour g. Dans ce cas, on peut montrer que la courbe admet localement une représentation paramétrique $t \mapsto \mathbf{M}(t)$ tel que le point $\mathbf{M}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ est régulier. On a alors

$$\forall t, \quad f(\mathbf{M}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad g(\mathbf{M}(t)) = 0$$

d'où, en dérivant en t_0, d'après la règle de la chaîne :

$$\langle \nabla f(\mathbf{M}_0), \overrightarrow{\mathbf{OM}}'(t_0) \rangle \quad \text{et } \langle \nabla g(\mathbf{M}_0), \overrightarrow{\mathbf{OM}}'(t_0) \rangle$$

Autrement dit, la tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathbf{M}_0$ est contenue dans les deux plans tangents à S_1 et S_2 en $\mathbf{M}_0$.

Proposition 24: Tangente en un point régulier

Soient $S_1 : f(x,y,z) = 0$, $S_2 : g(x,y,z) = 0$ deux surfaces et $\mathscr{C} : \begin{cases} f(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{cases}$ la courbe intersection. Si **M** est un point régulier de $\mathscr{C}$, alors la tangente à $\mathscr{C}$ en **M** est l'intersection des plans tangents à S_1 et S_2 en **M**.

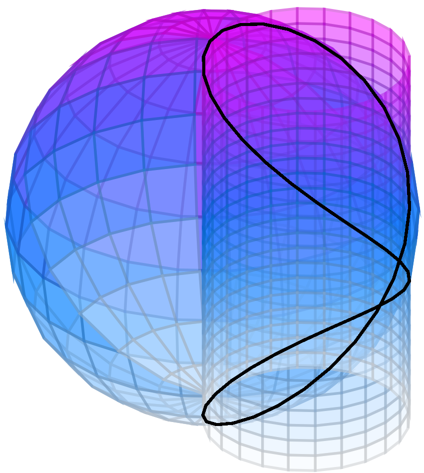
Exemple 25.

Considérons la courbe $\mathscr{C}$ obtenue comme l'ensemble des points $\mathbf{M}(x,y,z)$ vérifiant les équations

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)+y^2 &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

On vérifie que le point $\mathbf{M}(0,0,1)$ est régulier, et que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en **M** est donnée par

$$\begin{cases} z-1 &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$



3.2. Cas des sections planes

Pour comprendre une surface, il peut être utile d'en déterminer l'intersection avec des plans parallèles aux plans de coordonnées. Ces intersection sont alors des courbes planes qu'il peut être plus facile à appréhender. Nous avons déjà vu de tels exemples dans le cas des lignes de niveau de surfaces d'équation $z = f(x,y)$.

Exemple 26.

Déterminons les intersections de la surface S d'équation $x^2+y^2 = 1+z^2$ avec des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Étudions les intersections avec les plans d'équations $P_\alpha : z = \alpha$. Un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est situé sur le plan P_α et sur la surface si et seulement si

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 1+z^2 \\ z &= \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &= 1+\alpha^2 \\ z &= \alpha \end{cases}$$

On reconnaît un cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{1+\alpha^2}$ contenu dans le plan d'équation $z = \alpha$.

La surface est donc la réunion de cercle dont les centres sont situés sur la même droite : on dit que c'est une *surface de révolution*. Étudions les intersections avec les plans d'équation $P_\beta : y = \beta$. Soit alors un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} M \in P_\beta \cap S &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 + z^2 \\ y &= \beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 &= 1 - \beta^2 \\ y &= \beta \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation, dans le plan $y = \beta$, d'une conique du genre hyperbole. Alors, deux cas se présentent : soit $\beta = \pm 1$, et alors l'intersection est réduite à deux droites orthogonales : les droites d'équations

$$\begin{cases} x - z &= 0 \\ y &= \pm 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + z &= 0 \\ y &= \pm 1 \end{cases}$$

soit $\beta \neq \pm 1$, et alors on reconnaît une hyperbole équilatère dont l'orientation des asymptotes dépendent de l'appartenance à $]-1,1[$ de β. On a représenté deux de ces hyperboles sur la figure 2, puis la surface sur la figure 3.

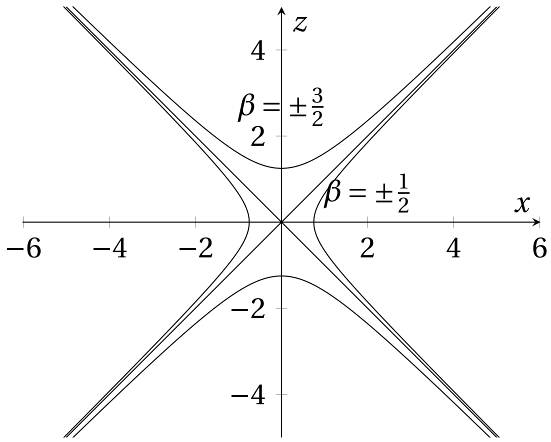


Figure 2: Intersections de la surface $1 + z^2 = x^2 + y^2$ avec un plan $y = \beta$

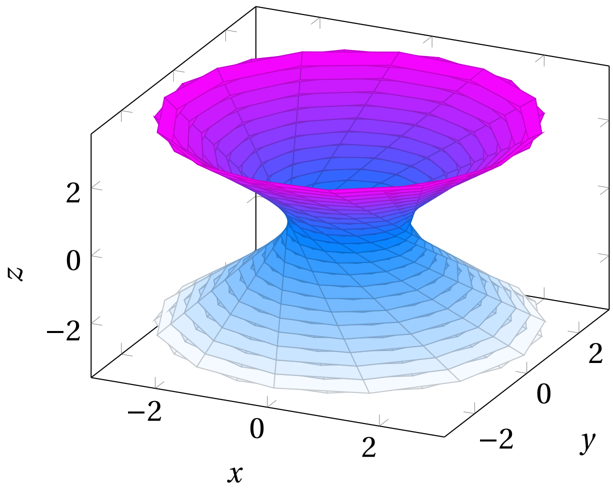


Figure 3: Représentation de la surface $1 + z^2 = x^2 + y^2$