Intégration sur un intervalle quelconque, exemples

1. Convergence d'une intégrale

1.1. Définition et premiers exemples

Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $f :]a, b[$ une fonction continue. Soit F une primitive de f. On rappelle que les fonctions f et F sont reliées par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall t \in]a, b[, \quad F'(t) = f(t)$$

et que par conséquent, pour tout $x_0 \in]a, b]$, on a

$$\forall t \in]a, b[, \quad F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t) \mathrm{d}t$$

Définition 1: Intégrales convergente

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si la fonction F admet une limite finie en a et en b. On dit que l'intégrale est divergente autrement. On note alors

$$\int_a^b f := \int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$$

Remarque 2.
Si la fonction f est continue (ou prolongeable par continuité) sur le fermé $[a, b]$, alors l'intégrale est toujours convergente. Plus généralement, il suffit d'étudier la limite d'une primitive seulement en les extremités en lesquelles la fonction f n'est pas prolongeable par continuité.

Proposition 3: Intégrales convergentes de référence

On a les résultats suivants :

1. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
3. $\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Preuve :
Pour $\alpha \neq -1$, la fonction $F : t \mapsto \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$. Cette fonction admet une limite finie en 0 si, et seulement si $\alpha - 1 < 0$. Cette fonction admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si $\alpha - 1 > 0$. Le cas $\alpha = -1$ se traite en utilisant la fonction logarithme, qui n'a de limite finie ni en 0 ni en $+\infty$. Cela permet de démontrer les deux premiers points.
Si $\alpha = 0$, la fonction $t \longmapsto \exp(-\alpha t)$ est constante égale à 1, la fonction $t \longmapsto t$ en est une primitive et n'a pas de limite finie en $+\infty$ donc l'intégrale est divergente. Autrement, la fonction $F : t \longmapsto \frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha t)$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui permet de démontrer le dernier point. ■

Remarque 4.
Les intégrales de fonctions puissances sont appelées *intégrales de Riemann*. Le résultat précédent donne donc des conditions nécessaires et suffisante pour que les intégrales de Riemann soient convergentes.

Exemple 5.

Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty}\exp(-t)\mathrm{d}t$ sont convergentes. Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty}\exp(t)\mathrm{d}t$ sont divergentes.

Proposition 6: Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, f, g deux fonctions continues sur $]a,b[$ et $c \in\,]a,b[$ Alors :

1. (linéarité) Si les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge aussi et on a $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. (positivité) Si f est positive et $\int_a^b f$ convergente, alors $\int_a^b f \geq 0$.
3. (croissance) Si $f \leq g$ et que les intégrales $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ sont convergentes, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
4. (relation de Chasles) Si $\int_a^c f, \int_c^b f$ sont convergentes, alors la $\int_a^b f$ aussi et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Preuve :
Soient F, G des primitives des fonctions f et g, que l'on peut supposer s'annuler en c. Alors $H : \lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$, donc admet une limite finie en a et b par opérations sur les limites, ce qui permet de démontrer le premier point.

Si f est positive, alors F est croissante et comme elle s'annule en c par hypothèsese on a $\lim_{a^+} F \leq 0$ et $\lim_{b^-} F \geq 0$, donc $\int_a^b f = \lim_{b^-} - \lim_{a^+} F \geq 0$.

La croissance est une conséquence de la positivité et de la linéarité.

Dire que les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes revient exactement à dire que la fonction F admet une limite en a^+ et b^-, et la définition de l'intégrale convergente donne l'égalité souhaitée. ■

1.2. Convergence de l'intégrale d'une fonction positive

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ **et positive**, avec $a < b$ et $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition 7: Majoration des primitives

L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si, et seulement si la primitive de f qui s'annule en a est majorée.

Preuve :
Soit F la primitive de f qui s'annule en a. Alors F est croissante puisque sa dérivée f est positive. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction F admet une limite en b^- si, et seulement si elle est majorée. ■

Proposition 8: Critère de majoration

Soit g une fonction continue positive sur $[a,b[$. On suppose que

- $\forall t \in [a,b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$,
- $\int_a^b g$ est convergente.

Alors $\int_a^b f$ est convergente.

Preuve :
Soient F, G les primitives des fonctions f et g respectivement qui s'annulent en a. Il suffit de démontrer que la fonction F est majorée. On a par hypothèses :

$$\forall t \in [a,b[, \quad 0 \leq F'(t) \leq G'(t)$$

donc, par intégration des inégalités sur un intervalle de la forme $[a,x]$ pour $x \in [a,b[$:

$$\forall x \in [a,b[, \quad 0 \leq F(x) \leq G(x) \leq \lim_{b^-} G$$

Donc la fonction F est majorée. ∎

Exemple 9.
Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est convergente. La fonction $f : t \mapsto \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$, et de plus on a

$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq f(t) \leq \exp(-t)$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \exp(-t) \mathrm{d}t$ étant une intégrale convergente de référence, on a d'après la proposition précédente que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 10.
Le résultat précédent reste valable si les fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b]$. Ainsi on peut montrer que $\int_0^1 \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est convergente car la fonction $f : t \mapsto \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et on a

$$\forall t \in]0,1], \quad 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Finalement, grâce à l'exemple 9 et la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition 11: Critère de domination

Soit g une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ telle que

- $f = O_b(g)$
- $\int_a^b g$ est convergente.

Alors $\int_a^b f$ est convergente.

Preuve :

Par hypothèses il existe $\eta > 0$ une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{rl} b-\eta > a & \text{quitte à diminuer la valeur de } \eta \\ \forall t \in [b-\eta, b[, & f(t) \leq Cg(t) \end{array}$$

or l'intégrale $\int_{b-\eta}^{b} Cg$ est convergente par hypothèses. Ainsi l'intégrale $\int_{b-\eta}^{b} f$ est convergente par critère de majoration. Or l'intégrale $\int_{a}^{b-\eta} f$ est convergente car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Le résultat suit alors de la relation de Chasles appliquée à la fonction f utilisant la décomposition $[a, b[= [a, b-\eta] \cup [b-\eta, b[$. ■

Remarque 12.
Ce critère montre en particulier que seul le comportement au voisinage de b est important. Ce critère peut s'appliquer directement si $f = o_b(f)$.

Proposition 13: Critère d'équivalence

Supposons la fonction f continue en a. Soit g une fonction continue positive sur $[a, b[$. On suppose que

$$f \sim_b g$$

Alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Preuve :
On a $g = O_b(f)$ et $f = O_b(g)$, d'où le résultat par critère de comparaison. ■

Exemple 14.
Étudions la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t^4+2} \ln(t) \mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{2t+1}{t^4+2} \ln(t)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus on a

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(t)}{t^3}$$

donc les intégrales $\int_1^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} \mathrm{d}t$ ont même nature. Or on a par croissances comparées :

$$\frac{\ln(t)}{t^3} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

avec $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ intégrale de référence convergente. Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t^4+2} \ln(t) \mathrm{d}t$ est convergente.

2. Techniques de convergence et de calculs d'intégrales

2.1. Intégrales absolument convergentes

Soit I un intervalle d'extremités $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec $a < b$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

Définition 15: Intégrale absolument convergente

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *absolument convergente* si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente.

La notion d'intégrale absolument convergente joue pour l'intégrale le rôle que joue la notion de série absolument convergente pour les séries numériques.

Exemple 16.

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(it)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ sont absolument convergente.

Définition 17: Fonction intégrable

Une fonction f est dite *intégrable* sur un intervalle I si elle y est continue et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Exemple 18.

Les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $t \longmapsto \frac{\exp(it)}{1+t^2}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$. Plus généralement elles le sont sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$: on dit plus simplement que ces fonctions sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Proposition 19: Absolue convergence implique la convergence

Si l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente. On la note alors en général $\int_I f(t)\mathrm{d}t$.

Preuve :
Supposons f à valeurs réelles. On découpe f en partie positive f^+ et négative f^- de sorte que

$$f = f^+ - f^-$$
$$\left|f\right| = f^+ + f^-$$

On en déduit

$$0 \leq f^+ \leq \left|f\right|$$
$$0 \leq f^- \leq \left|f\right|$$

Et donc les fonctions f^+ et f^- sont intégrables sur I par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, donc par linéarité de l'intégrale on obtient que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
Si maintenant f est à valeur complexes, alors on a

$$\left|\mathrm{Re}(f)\right| \leq \left|f\right|$$
$$\left|\mathrm{Im}(f)\right| \leq \left|f\right|$$

ce qui montre que les deux fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I, donc d'après ce que l'on vient de démontrer les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ sont convergentes, donc de même pour

$$\int_a^b f := \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

par linéarité de l'intégrale ■

Exemple 20.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(it)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 21.

Un des intérêts de la notion de convergence absolue, même si elle n'est pas équivalente à la notion de convergence, est de permettre de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale à celle d'une fonction positive pour lesquelles il existe des critères simples de convergence. Ainsi, les critères de domination s'appliquent naturellement en remplaçant les fonctions par des fonctions à valeurs complexes et le mot "convergence" par "convergence absolue".
De plus, la notion d'intégrale convergente ne dépendant que du comportement au voisinage des bornes, on peut employer les expressions "intégrables au voisinage de b" au lieu de "convergence absolue" dans les critères de comparaisons. Ainsi : si on a $f = O_b(g)$ avec $f, g : [a, b[\to \mathbb{C}$ des fonctions continues, si g est intégrable au voisinage de b, alors f aussi. On en déduit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente.

Exemple 22.

L'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^\times} \frac{\sin(t)}{t} \exp(-t) \mathrm{d}t$ est absolument convergente. En effet la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \exp(-t)$ est prolongeable par continuité en 0, continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ et par croissances comparées on a

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \exp(-t) \right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et intégrable au voisinage de $+\infty$: elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^\times$.

2.2. Intégration par parties

Théorème 23: Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]a, b[$. On suppose que la fonction fg admet une limite en a^+ et b^-. Alors les intégrales

$$\int_a^b fg' \text{ et } \int_a^b f'g$$

sont de même nature et en cas de convergence on a l'égalité

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

Preuve :
Non exigible. ∎

Exemple 24.

Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(it)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est convergente. Posons $u : t \mapsto -i \exp(it)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$. On a

$$\lim_{t \to 1+} uv(t) = -i \exp(i)$$
$$\lim_{t \to +\infty} uv(t) = 0$$

donc par théorème d'intégration par parties, l'intégrale $\int_1^{+\infty} u'v = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(it)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} v'u = -\int_1^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t\sqrt{t}}$. Or on a

$$\frac{\exp(it)}{t\sqrt{t}} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$$

et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{\exp(it)}{t\sqrt{t}}$ est également intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et donc son intégrale est convergente. On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(it)}{t} \mathrm{d}t$ est convergente. On en déduit en particulier que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ sont convergentes.

Remarque 25.
On a volontairement omis les hypothèses de régularité des fonctions u et v dans la rédaction car en pratique celles-ci ne seront pas exigées.

Exemple 26.
Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\exp(-t)\mathrm{d}t$ est convergente et donnons sa valeur. Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\exp(-t)$. Alors on a par croissances comparées

$$\lim_{t\to 0} uv(t) = 0$$
$$\lim_{t\to +\infty} uv(t) = 0$$

donc par théorème d'intégration par parties les intégrales $\int_0^{+\infty} uv' = \int_0^{+\infty} t\exp(-t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'v\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\exp(-t)\mathrm{d}t$ ont même nature. En particulier l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\exp(-t)\mathrm{d}t$ est convergente car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente de référence et la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t\exp(-t)\mathrm{d}t &= -\int_0^{+\infty} -\exp(-t)\mathrm{d}t \\ &= 1\end{aligned}$$

2.3. Changement de variables

Théorème 27: Changement de variables

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ **bijective et de classe** $\mathscr{C}^1$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f \text{ et } \int_\alpha^\beta \left|\varphi'\right| f\circ\varphi$$

sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Preuve :
Non exigible. ■

Exemple 28.
Montrons la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ et calculons sa valeur. La fonction $f : t \mapsto \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\times & \to & \mathbb{R}_+^\times \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Par théorème du changement de variable, les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}_+^\times} f \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f\circ\varphi\varphi' = \int_0^{+\infty} 2\exp(-t)\mathrm{d}t$$

sont de même nature et égales en cas de convergence. On conclut donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \mathrm{dt}$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}} \mathrm{dt} = 2$$