Calculs de déterminants, applications

1. Déterminant d'une matrice carrée

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

1.1. Définitions et propriétés théoriques

Définition 1: Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application appelée *déterminant* et notée $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et telle que

- elle est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice,
- l'échange de deux colonnes oppose le déterminant,
- le déterminant de la matrice I_n vaut 1.

Remarques 2.

- Cette définition est en fait un théorème dont la preuve générale est hors programme. On dit parfois que le déterminant est "l'unique *forme multilinéaire alternée* qui vaut 1 sur l'identité".
- Pour $n = 1$, le déterminant est l'application identité.
- La formule donnée pour le produit mixte en dimension 2 et 3 fournit une application vérifiant les conditions de la définition : le déterminant d'une matrice de taille 2 ou 3 peut se calculer grâce à la formule du produit mixte.
- Si $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, alors on note souvent

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- Si les colonnes de la matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont $C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{K}^n$, alors on notera parfois $\det(A) = \det(C_1, \cdots, C_n)$.

Proposition 3: Déterminant d'une matrice ayant deux colonnes identiques

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant deux colonnes identiques. Alors $\det(A) = 0$.

Preuve :
Soient $C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de la matrice A, et soit $i \neq j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $C_i = C_j$. On peut supposer que $i < j$. Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) \\ &= -\det\left(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n\right) \quad \text{car l'échange de deux colonnes oppose le déterminant} \\ &= -\det(A) \quad \text{car } C_j = C_i \end{aligned}$$

donc $2\det(A) = 0$, d'où $\det(A) = 0$. ■

Proposition 4: Déterminant et homothéties

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Preuve :
Soient $C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de la matrice A. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\lambda A) &= \det(\lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n) \\
&= \lambda \det(C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n) \quad \text{par linéarité par rapport à la première colonne} \\
&= \lambda^2 \det(C_1, C_2, \lambda C_3, \dots, \lambda C_n) \quad \text{par linéarité par rapport à la deuxième colonne} \\
&= \dots \\
&= \lambda^n \det(C_1, \dots, C_n) \\
&= \lambda^n \det(A)
\end{aligned}$$

■

Proposition 5: Déterminant d'un produit

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Preuve :
H. P. ■

Remarque 6.
Cette propriété sera capitale dans pour démontrer la caractérisation des matrices inversibles (voir le théorème 18). On démontre le sens direct de ce théorème dans le corollaire suivant.

Corollaire 7: Déterminant de l'inverse d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Preuve :
On a $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ d'après la proposition 5. Or $\det(AA^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$ par définition du déterminant. Donc on a $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, d'où le résultat. ■

Proposition 8: Déterminant d'une transposée

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.

Preuve :
H. P. Cette propriété permet de généraliser aux lignes toutes les propriétés valables sur les colonnes.

■

Remarque 9.
Ceci implique que toute propriété valable sur les colonnes d'un déterminant est valable également sur les lignes. En particulier le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales est nul.

1.2. Calculs de déterminants

On rappelle trois opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

- Permutation de colonnes,
- Ajout à une colonne d'une combinaison linéaire **d'autres** colonnes,
- Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul.

Remarque 10.
Les mêmes opérations existent sur les lignes !

On étudie leur effet sur le déterminant. On retient que l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire **d'autres colonnes** ne change pas le déterminant.

Proposition 11: Opération sur les colonnes/lignes

Soient $C_1, \cdots, C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$ et soient $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ des scalaires. On a :

- $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \det\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) = \det(C_1, \cdots, C_n)$
- $\forall i, j \in \{1, \cdots, n\}, \quad i \neq j, \quad \det\left(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_j, \cdots, C_n\right) = -\det\left(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_i, \cdots, C_n\right)$
- $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \det(C_1, \cdots, \lambda C_i, \cdots, C_n) = \lambda \det(C_1, \cdots, C_n)$.

Les mêmes résultats sont valables sur les lignes.

Preuve :
Seule la première égalité nécessite une preuve car elle ne découle pas immédiatement de la définition du déterminant. Cependant on a par linéarité par rapport à la $i$ème colonne :

$$\begin{aligned}\det\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) &= \det(C_1, \cdots, C_n) \\ &\quad + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \underbrace{\det\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n\right)}_{=0 \text{ car deux colonnes sont identiques}} \\ &= \det(C_1, \cdots, C_n)\end{aligned}$$

On en déduit le résultat sur les lignes en utilisant la proposition 8. ■

Remarque 12.
Cette proposition signifie que l'on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss pour calculer un déterminant, en supposant que le déterminant d'une matrice "simple" est plus facile à calculer. C'est l'objet du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Théorème 13: Développement par rapport à une colonne ou une ligne

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soient $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. On note alors $A_{i,j}$ la sous-matrice obtenue à partir de A en supprimant toute la $i$ème ligne et toute la $j$ème colonne. On a alors

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Preuve :
Non exigible. ■

Remarques 14.

- Un moyen mnémotechnique pour retenir le signe affecté au coefficient utilisé pour le développement est de partir du coin supérieur gauche de la matrice qui est affecté du signe + et de changer de signe à chaque déplacement.
- Cette formule permet de calculer un déterminant de façon récursive. Couplée avec la méthode du pivot de Gauss, elle permet de réduire la complexité du déterminant à calculer.

Exemple 15.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss plutôt que la formule du produit mixte en taille 3, calculons le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{par développement par rapport à } C_1 \\ &= (12-9) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Proposition 16: Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux. Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Preuve :
On démontre le résultat par récurrence sur n, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, la proposition :

P_n : "$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, le déterminant de la matrice A est le produit de ses coefficients diagonaux".

Initialisation. Soit $A \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure (c'est en fait le cas de tous les éléments de $\mathrm{M}_1(\mathbb{K})$), alors $\det(A) = A$ est bien le produit de ses éléments diagonaux.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que P_n, montrons P_{n+1}. Soit $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, et notons $a_{i,j}$ le coefficient ligne i et colonne j. Alors en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(A_{1,1}) \end{aligned}$$

puisque les coefficients $a_{i,1}$ sont nuls pour $i \geq 2$ car la matrice A est triangulaire supérieure. Or la matrice $A_{1,1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, donc par P_n son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux. Or ceux-ci sont précisément $a_{2,2}, \cdots, a_{n+1,n+1}$ par construction, d'où

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} \prod_{i=2}^{n+1} a_{i,i} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} a_{i,i} \end{aligned}$$

CQFD.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, P_n. ∎

Remarque 17.
On obtient le même résultat avec une matrice triangulaire inférieure, en transposant (proposition 8).

2. Applications du déterminant

2.1. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 18: Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Preuve :
On a déjà démontré le sens direct : il s'agit du corollaire 7. Démontrons le sens réciproque par contraposée, c'est-à-dire supposons que la matrice A ne soit pas inversible, et montrons que son déterminant est nul.
Comme la matrice $A = (C_1, \cdots, C_n)$ n'est pas inversible, il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $AX = 0$. Notons $X = (x_1, \cdots, x_n)^\top$. Comme X est un vecteur non nul il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $x_i \neq 0$. Quitte à remplacer X par un vecteur qui lui est colinéaire, on peut supposer que $x_i = 1$. Alors l'opération $C_i \leftarrow C_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j C_j$ effectuée sur $\det(A)$ donne un déterminant dont la $i$ème colonne est nulle, donc $\det(A) = 0$. ∎

Remarque 19.
On sait que A est non inversible si, et seulement si $\ker(A) \neq \{0\}$. Ainsi

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \ker(A) \neq \{0\}$$

Le déterminant fournit donc une indication sur la non-trivialité d'un sous-espace vectoriel.

Définition 20: Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de la matrice A la fonction polynômiale :

$$\chi_A : \lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{I}_n - A)$$

Proposition 21: Polynôme caractéristique

La fonction $\lambda \mapsto \chi_A(\lambda)$ est une fonction polynômiale dont le polynôme associé est **unitaire**, de degré n.

Preuve :
La démonstration est claire pour $n \leq 3$ à cause des formules. La démonstration n'est pas exigible pour $n \geq 4$, mais peut se démontrer par récurrence sur n. ∎

2.2. Caractérisation des automorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 22: Déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit le *déterminant* de l'endomorphisme u comme étant celui de n'importe laquelle de ses matrices représentatives. On note ce nombre $\det(u)$.

Remarque 23.

Cette définition ne pose pas de problème car, si M et N sont deux matrices représentatives de l'endomorphisme u, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P^{-1}NP$ d'après la formule du changement de base (prendre la bonne matrice de passage), donc

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det(P^{-1}NP) \\
&= \det(P^{-1})\det(N)\det(P) \quad \text{d'après la proposition 5} \\
&= \det(P)^{-1}\det(N)\det(P) \quad \text{d'après le corollaire 7} \\
&= \det(P)^{-1}\det(P)\det(N) \\
&= \det(N)
\end{aligned}$$

En particulier, on peut définir le *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme u comme celui de n'importe laquelle de ses matrices représentatives, on le note alors χ_u.

Corollaire 24: Caractérisation des automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$u \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0$$

Preuve :

Soit M une matrice représentative de l'endomorphisme u.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{GL}(E) &\Leftrightarrow M \in \mathrm{GL}_{\dim(E)}(\mathbb{K}) \quad \text{d'après les liens endomorphismes} \leftrightarrow \text{matrices} \\
&\Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \quad \text{d'après le théorème 18} \\
&\Leftrightarrow \det(u) \neq 0 \quad \text{par définition}
\end{aligned}$$

■

Remarque 25.

Les mêmes remarques que pour les matrices s'appliquent ici : on sait qu'un endomorphisme u est non inversible si, et seulement si $\ker(u) \neq \{0\}$.

2.3. Caractérisation des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 26: Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. On appelle *déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$* le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$: si on note

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

et que l'on pose $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) := \det(A)$$

Remarque 27.

Le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle il est calculé. Le "déterminant d'une famille de vecteur" n'a donc aucun sens.

Corollaire 28: Caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est non nul, *i.e.*

$$\text{la famille } (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$$

Preuve :
Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ la matrice définie par les équations :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

(voir la définition 26). Il s'agit donc de démontrer que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si $\det(A) \neq 0$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et montrons d'abord l'équivalence suivante :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j u_j = 0$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_j u_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) e_i \quad \text{en permutant les sommes finies} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}AX=0 &\Leftrightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},\quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=0 \quad \text{par définition du produit matriciel}\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right)e_i=0 \quad \text{par liberté de la famille } (e_1,\cdots,e_n)\\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_ju_j=0 \quad \text{d'après le calcul précédent}\end{aligned}$$

D'où le premier résultat annoncé.
Montrons le sens direct. Supposons que la famille $(u_1,\cdots,u_n)$ forme une base de E, et montrons que $\det(A)\neq 0$. D'après le théorème 18, il suffit de montrer que la matrice A est inversible et donc d'après le théorème du rang, de montrer que $\ker(A)=\{0\}$. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\ker(A)$, alors d'après le calcul précédent, on obtient $\sum_{j=1}^n x_ju_j=0$, donc par liberté de la famille $(u_1,\cdots,u_n)$ on a $\forall j\in\{1,\cdots,n\}, x_j=0$ donc $X=0$. Donc $\det(A)\neq 0$.
Montrons le sens réciproque. Supposons que $\det(A)\neq 0$, c'est-à-dire d'après le théorème 18 que la matrice A est inversible, et qu'en particulier on a $\ker(A)=\{0\}$. Étant donné que la famille $(u_1,\cdots,u_n)$ est une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, il suffit de démontrer que cette famille est libre. Soit donc $x_1,\cdots,x_n$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^n x_ju_j=0$. Alors d'après la première équivalence démontrée plus haut, on a que le vecteur $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ est un élément de $\ker(A)$, donc d'après ce que l'on a dit précédemment c'est un vecteur nul. D'où le résultat. ■